



Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f , αν $f'(x) = f^2(x) \cdot f(-x)$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$ (2).

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$ (3). Η h είναι παραγωγίσιμη, ως προκύπτει από την σχέση (1), με $h'(x) = f'(x) \cdot f(-x) - f(x) \cdot f'(-x) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h'(x) = f^2(x) \cdot f^2(-x) - f^2(x) \cdot f^2(-x) = 0 \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = c \Rightarrow h(0) = c$ (4).

Από τις σχέσεις (2), (3), (4) προκύπτει η $f(x) \cdot f(-x) = 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(x) = f(x) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(x) = e^x$.